Maximal- und Minimalwert von Flächeninhalten in Abhängigkeit von x mithilfe der quadratischen Ergänzung

Quadratische Terme der Form $A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ lassen sich durch „Quadratische Ergänzung“ (siehe 8. JGST 8.1 Quadratische Terme) in vollständige Quadrate plus Zahlenrest der Form $T(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ umwandeln. Aus diesen Termen kann man dann unmittelbar den Extremwert und die dazugehörige Belegung für x ablesen.

Vorgehensweise	**Beispiel: $A(x) = 5x^2 - 20x + 25$**
Klammere den Formparameter a aus dem gesamten Term aus, setze eckige Klammern und berücksichtige die Vorzeichen.	$A(x) = 5 \cdot [\, x^2 - 4x + 5 \,]$
Halbiere den Formparameter b, quadriere das Ergebnis, addiere es hinter dem x und subtrahiere es direkt dahinter wieder.	$A(x) = 5 \cdot [(\, x^2 - 4x + 2^2 \,) - 4 + 5 \,]$
Fasse die ersten drei Summanden der eckigen Klammer nach der 1. oder 2. Binomischen Formel zu einem Quadrat zusammen. Fasse anschließend die letzten beiden Summanden der eckigen Klammer zusammen.	$A(x) = 5 \cdot [(\, x - 2 \,)^2 + 1 \,]$
Multipliziere den Faktor a vor der eckigen Klammer nach dem Distributivgesetz mit den beiden Summanden der eckigen Klammer; achte dabei auf die Vorzeichen.	$A(x) = 5(\, x - 2 \,)^2 + 5$
Entnehme dem Term das Minimum (für a > 0) bzw. das Maximum (für a < 0) und die dazu gehörige Belegung von x.	für $x = 2$ $\quad A_{min} = 5$ FE

Noch gemeinsam ein Übungsbeispiel:

$$A(x) = -2x^2 + 12x + 22$$
$$A(x) = -2 \cdot [x^2 - 6x - 11]$$
$$A(x) = -2 \cdot [(x^2 - 6x + 3^2) - 9 - 11]$$
$$A(x) = -2 \cdot [(x - 3)^2 - 20]$$
$$A(x) = -2(x - 3)^2 + 40 \Rightarrow \text{ für } x = 3 \quad A_{max} = 40 \text{ FE}$$

Aufgabe: Ermittle für folgende Terme den Extremwert und die dazugehörige Belegung für x.

$A(x) = 2x^2 - 8x + 11$ $\qquad A(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4{,}5$ $\qquad A(x) = -0{,}2x^2 - 0{,}4x + 2{,}4$

$A(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 6$ $\qquad A(x) = -2x^2 + 6x + 4{,}5$ $\qquad A(x): y = 0{,}25x^2 + 1$

Ungeordnete Lösungen: für $x = 3$ $A_{min} = 0$ FE ☺ für $x = 0$ $A_{min} = 1$ FE ☺ für $x = -1$ $A_{max} = 2{,}6$ FE; für $x = 2$ $A_{min} = 3$ FE ☺ für $x = -1$ $A_{max} = 5$ FE ☺ für $x = 1{,}5$ $A_{max} = 9$ FE