Extremwertaufgaben der Flächenberechnung

Beispielaufgabe:

Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist die Basis [AB] 5 cm lang, die Höhe h_c 2 cm. Es entstehen neue gleichschenklige Dreiecke $A_nB_nC_n$, wenn man die Basis auf beiden Seiten um 0,5 x cm verkürzt und gleichzeitig die Höhe von C aus um x cm verlängert.

Verkürzte Basis:

$\overline{A_nB_n}(x) = (5 - 2 \cdot 0{,}5x)\,\text{cm}$

Verlängerte Höhe:

$h(x) = (2 + x)\,\text{cm}$

Flächeninhalt A(x):

$$A_{\triangle A_nB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_nB_n}(x) \cdot h(x) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (5 - x) \cdot (2 + x)\,\text{cm}^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (10 + 3x - x^2)\,\text{cm}^2 =$$
$$= (-0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5)\,\text{cm}^2$$

maximaler Flächeninhalt

$$A_{\triangle A_nB_nC_n}(x) = -0{,}5\left[x^2 - 3x \boxed{+1{,}5^2 - 1{,}5^2} - 10\right]\text{cm}^2 =$$
$$= -0{,}5\left[(x - 1{,}5)^2 - 12{,}25\right]\text{cm}^2 =$$
$$= \left[-0{,}5(x - 1{,}5)^2 + 6{,}125\right]\text{cm}^2$$
$$A_{max} = 6{,}125\,\text{cm}^2 \;\; \text{für} \;\; x = 1{,}5$$

Aufgaben

1. Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist die Basis [AB] 6 cm und die Höhe h_c 12 cm lang. Es entstehen neue gleichschenklige Dreiecke $A_nB_nC_n$, wenn man die Basis auf beiden Seiten um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe von C aus um x cm verkürzt. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?
2. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Kathete [AB] 5 cm und die Kathete [AC] 8 cm lang. Es entstehen neue Dreiecke AB_nC_n, wenn man die Kathete [AB] über B hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig die Kathete [AC] von C aus um 0,5x cm verkürzt. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?
3. Die Raute ABCD hat die Diagonalenlängen $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 4\,\text{cm}$. Man erhält neue Rauten $A_nB_nC_nD_n$, wenn man [AC] auf beiden Seiten um x cm verkürzt und gleichzeitig [BD] auf beiden Seiten um x cm verlängert. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?
4. Die Raute ABCD hat die Diagonalenlängen $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 10\,\text{cm}$. Man erhält neue Rauten $AB_nC_nD_n$, wenn man [AC] über C hinaus um 3x cm verlängert und gleichzeitig [BD] auf beiden Seiten um x cm verkürzt. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?
5. Im Dreieck ABC ist die Grundseite [AB] 3 cm lang und die Höhe h_C 6 cm. Es entstehen neue Dreiecke AB_nC_n, wenn man die Grundseite [AB] über B hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig h_C von C aus um x cm verkürzt. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Lösungen

Die Buchstaben der falschen Lösungen ergeben das Lösungswort!

	Ansatz	A(x)	Extremwert
ge	A(x) = 0,5 · (2 + 2x) · (8 – 2x) cm²	A(x) = (–2x² + 16x + 30) cm²	A_{max} = 16,75 cm² für x = 7,5
me	A(x) = 0,5 · (10 – 2x) · (4 + 2x) cm²	A(x) = (–2x² + 6x + 20) cm²	A_{max} = 24,5 cm² für x = 1,5
ni	A(x) = 0,5 · (6 + 6x) · (10 – 4x) cm²	A(x) = (–6x² + 18x + 15) cm²	A_{max} = 48,5 cm² für x = 3,5
ga	A(x) = 0,5 · (6 + 2x) · (12 – x) cm²	A(x) = (–x² + 9x + 36) cm²	A_{max} = 56,25 cm² für x = 4,5
co	A(x) = 0,5 · (3 + x) · (6 – x) cm²	A(x) = (–0,5x² + 1,5x + 9) cm²	A_{max} = 10,125 cm² für x = 1,5
ol	A(x) = 0,5 · (6 + 3x) · (10 – 2x) cm²	A(x) = (–3x² + 9x + 30) cm²	A_{max} = 36,75 cm² für x = 1,5
so	A(x) = 0,5 · (5 + x) · (8 – 0,5x) cm²	A(x) = (–0,25x² + 2,75x + 20) cm²	A_{max} = 27,5625 cm² für x = 5,5
al	A(x) = 0,5 · (8 – x) · (10 + 2x) cm²	A(x) = (–3x² + 8x + 4) cm²	A_{max} = 16,25 cm² für x = 2

Lösungswort: ____________________________